MSC 35Q35

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ ВОДОЕМА В ГРУНТ: СЛУЧАЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Св.А. Гриценко, Н.С. Ерыгина

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru, eryginan@bsu.edu.ru

Аннотация. На микроскопическом уровне исследуется задача о фильтрации жидкости из водоема в твердый пористый грунт. Динамика жидкости описывается системой нестационарных уравнений Стокса для несжимаемой жидкости, а совместное движение твердого упругого грунта и жидкости те – уравнениями Ламе. Доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи. Выполняется усреднение системы уравнений, позволяющее избавиться от быстро осциллирующих коэффициентов.

Ключевые слова: фильтрация жидкостей, уравнения Ламе и Стокса, усреднение периодических структур.

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим задачу о фильтрации жидкости из водоема в твердый пористый скелет. Обозначим через Q всю рассматриваемую область из пространства $\mathbb{R}^3$, которая включает в себя верхнюю часть, Ω^0 – водоем, нижнюю часть Ω – пористый скелет и их общую границу S_0: $Q = \Omega^0 \cup S^0 \cup \Omega$.

Предположим, что система координат выбрана так, что часть S^1 внешней границы S области $Q = \Omega^0 \cup S^0 \cup \Omega$ принадлежит плоскости $\{x_3 : x_3 = 0\}$, $\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{e}_3$, область Q принадлежит полупространству $\{x_3 : x_3 < 0\}$. Пусть $S^2 = S \backslash \overline{S^1}$ является поверхностью класса C^2.

Кроме того, используем необходимое в дальнейшем для усреднения упрощающее геометрическое предположение о периодичности порового пространства. Пусть область Ω есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$, подобласть $Y_s \subset Y$ моделирует твердый скелет Ω_s^ε, подобласть $Y_f \subset Y$ моделирует поровое пространство Ω_f^ε, а поверхность $\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s$ моделирует границу Γ^ε «твердый скелет – поровое пространство», так что твердый скелет есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, поровое пространство есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, а граница Γ^ε – периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

Движение жидкости в Ω^0 при $t > 0$ описывается нестационарной системой уравнений Стокса

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{1.1}$$

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_f + \varrho_f \boldsymbol{e}, \qquad \mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) - p\,\mathbb{I}, \tag{1.2}$$

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0357

а совместное движение упругого скелета и жидкости в Ω при $t > 0$ описывается уравнением неразрывности (1.1), уравнением сохранения моментов

$$\tau_0 \varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \boldsymbol{e} \, , \tag{1.3}$$

и уравнением состояния

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I} \, , \tag{1.4}$$

где $\varrho^\varepsilon = \varrho_f \chi^\varepsilon + \varrho_s(1-\chi^\varepsilon)$.

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ при $t > 0$ выполняются условия непрерывности

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t), \tag{1.5}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}} \mathbb{P}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0,\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \mathbb{P}(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \, , \tag{1.6}$$

для перемещений и нормальных напряжений. Здесь $\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w})$ – симметрическая часть производной $\nabla \boldsymbol{w}$, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, $n(\boldsymbol{x}^0)$ – вектор внешней нормали к границе S^0 в точке $\boldsymbol{x}^0 \in S^0$, $\mathbf{e}$ — единичный вектор в направлении силы тяжести.

На S^1 при $t > 0$ задается условие Неймана

$$\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{n} = -p^0(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n} \, , \tag{1.7}$$

а на части S^2 внешней границы S при $t > 0$ — условие Дирихле

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{1.8}$$

Задача замыкается начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0 \, , \qquad \boldsymbol{x} \in Q \, . \tag{1.9}$$

В (1.1)-(1.9) характеристическая функция $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})$ области Ω^ε_f определяется выражением

$$\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = (1-\zeta)\chi\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) \, ,$$

где $\zeta = \zeta(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция области Ω^0 в Q, $\chi(\boldsymbol{y})$ – характеристическая функция Y_f (жидкой части элементарной ячейки).

Пусть

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0 \, , \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1 \, .$$

В данной работе для случая $0 < \mu_0 < \infty$ рассматривается предел при $\tau_0 \to 0$ модели (1.1)-(1.9), состоящий из уравнений (1.1), (1.4)-(1.8), дополненных уравнением сохранения моментов

$$\nabla \cdot \mathbb{P}_f + \varrho_f \boldsymbol{e} = 0 \tag{1.10}$$

в области Ω^0 при $t > 0$, уравнением сохранения моментов

$$\nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^{\varepsilon} \boldsymbol{e} = 0 \tag{1.11}$$

в области Ω при $t > 0$ и начальным условием

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \ , \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \bigcup \Omega_f^{\varepsilon} \ . \tag{1.12}$$

Заданная функция p^0 предполагается гладкой:

$$\int_0^T \int_Q |\nabla p^0(\boldsymbol{x}, t)|^2 dx dt = \mathfrak{P}^2 < \infty \ . \tag{1.13}$$

Сформулированная задача с большой степенью точности описывает физический процесс на микроскопическом уровне. Но математическая модель физического объекта в несколько десятков (сотен) метров, в которой коэффициенты уравнений осциллируют на масштабе в несколько микрон (характерный размер пор в грунте) неудобна для практических применений. Существующей альтернативой данной модели являются модели на основе широко применяемой в теории фильтрации системы уравнений фильтрации Дарси. В ней макроскопические скорость $\boldsymbol{v}$ и давление p жидкости есть решения системы уравнений

$$\boldsymbol{v} = \frac{k}{\mu_0}(-\nabla p + \boldsymbol{F}) \ , \qquad \nabla \cdot \ \boldsymbol{v} = 0 \ , \tag{1.14}$$

в которой заданная постоянная k характеризует проницаемость грунта, μ_0 – вязкость жидкости и $\boldsymbol{F}$ – заданный вектор плотности массовых сил. Если рассматривать совместное движение жидкости в грунте и в водоеме, то единственно возможным режимом движения в водоеме для уравнений фильтрации Дарси является гидростатика (см. [1]). В самом деле, если динамика жидкости в водоеме описывается уравнениями Стокса, то непонятно, какие условия сопряжения (краевые условия) необходимы на общей границе «грунт – водоем». Для уравнений Стокса формально требуются три скалярных краевых условия, а для системы уравнений фильтрации (1.14) необходимо только одно скалярное краевое условие. Поэтому естественные условия равенства перемещений и нормальных напряжений здесь неприменимы.

Кроме того, гидростатика не учитывает конвекцию в водоеме при описании миграции примесей из водоема в грунт. Например, засоление почвы морской водой.

В научной литературе исследовались отдельные случаи этой задачи. В частности, результаты для $\mathbb{R}^2$ и особой геометрии порового пространства (несвязный твердый скелет) получены в работах В. Ягера и А. Микелича [2]- [4].

В данной статье на основе работ А.М. Мейрманова [15]- [18] задача решается в области из $\mathbb{R}^3$ в предположении связности жидкой части и связности твердого скелета. Вместо закона Дарси предлагается вторая альтернатива системе уравнений (1.1)-(1.12) — усреднение этой же системы. Полученная усредненная модель избавлена от быстро осциллирующих коэффициентов и пригодна для практических применений.

2. Основные результаты.

Определение 1. *Будем говорить, что функции $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon},\, p^{\varepsilon}\}$, такие что*

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon},\ \ p^{\varepsilon},\ \ \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}),\quad \big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{\varepsilon}\big)\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)\in L_2\big((0,T);L_2(Q)\big)\ ,$$

являются обобщенным решением задачи (1.1), (1.4)-(1.8), (1.10)-(1.12), если они удовлетворяют уравнению неразрывности (1.1) почти всюду в $Q\times(0,T)$, граничному условию (1.8), начальному условию (1.12) и интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_Q\Big(\big(\zeta\mathbb{P}_f+(1-\zeta)\mathbb{P}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})+\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p^0)-\tilde{\varrho}^{\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big)dxdt=0 \qquad (2.1)$$

для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, обращающейся в нуль на границе S^2_T.

Здесь $\tilde{\varrho}^{\varepsilon}=\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{\varepsilon}\big)\varrho_f+(1-\zeta)(1-\chi^{\varepsilon})\varrho_s$.

Тождество (2.1) содержит в себе граничные условия (1.5)-(1.7).

Теорема 1. *При условии (1.13) для всех $\varepsilon>0$ на произвольном интервале времени $[0,T]$ существует единственное обобщенное решение задачи (1.1), (1.4)-(1.8), (1.10)-(1.12) и для него справедлива оценка*

$$\int_0^T\int_Q\Big(|p^{\varepsilon}|^2+\alpha_{\mu}(\zeta+(1-\zeta)\chi^{\varepsilon})|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t})|^2\Big)\,dx\,dt+$$
$$+\lambda_0\max_{0\le t\le T}\int_{\Omega}(1-\chi^{\varepsilon})|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})|^2dx\leqslant C_0(\mathfrak{P}^2+1)\ . \qquad (2.2)$$

Теорема 2. *Пусть*

$$\alpha_{\mu}=\mu_0,\ 0<\mu_0,\ \lambda_0<\infty$$

и функции $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon},\, p^{\varepsilon}\}$ есть обобщенное решение задачи (1.1), (1.4)-(1.8), (1.10)-(1.12).

Тогда при $\varepsilon\to 0$ последовательность $\{p^{\varepsilon}\}$ сходится слабо в $L_2\big((0,T);L_2(Q)\big)$ к функции p, а последовательность $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$ сходится слабо в $L_2\big((0,T);W^1_2(Q)\big)$ к функции $\boldsymbol{w}$. Указанные предельные функции являются решением усредненной системы, состоящей из уравнений Стокса

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0\ , \qquad (2.3)$$

$$\nabla\cdot\Big(\mu_0\mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t})-p\,\mathbb{I}\Big)+\varrho_f\,\boldsymbol{e}=0 \qquad (2.4)$$

в области Ω^0 при $t>0$, уравнения неразрывности (1.1), усредненного уравнения сохранения моментов

$$\nabla\cdot\widehat{\mathbb{P}}+\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}=0\ , \qquad (2.5)$$

и уравнения состояния

$$\widehat{\mathbb{P}}=-p\,\mathbb{I}+\mathfrak{N}_1:\mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t})+\mathfrak{N}_2:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+\int_0^t\mathfrak{N}_3(t-\tau):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))d\tau \qquad (2.6)$$

в области Ω при $t > 0$.

Система дополняется условием непрерывности нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega^0}} \Big(\mu_0 \mathbb{D}\big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t)\big) - p(\boldsymbol{x}, t)\,\mathbb{I}\Big) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \quad (2.7)$$

на общей границе S^0, условием Неймана

$$\Big(\mu_0 \mathbb{D}\big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t)\big) - p(\boldsymbol{x}, t)\,\mathbb{I}\Big) \cdot \boldsymbol{n} = -p^0(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{n}, \quad (2.8)$$

на части S^1 внешней границы S, условием Дирихле

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad (2.9)$$

на части S^2 внешней границы S, и начальным условием

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega. \quad (2.10)$$

Тензоры 4 ранга $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3(t)$ вычисляются по формулам (4.12); симметричный тензор $\mathfrak{N}_1$ является положительно определенным.

В выражениях типа $\mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w})$ двоеточием обозначается свертка тензоров 4 и 2 ранга.

3. Доказательство Теоремы 1.

Доказательство теоремы основывается на энергетическом тождестве

$$\frac{1}{2}\int_Q \Big(\lambda_0(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)\big)|^2\Big)dx +$$
$$+ \alpha_\mu \int_0^t \int_Q \big(\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)\Big|\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial \tau}(\boldsymbol{x}, \tau)\Big)\Big|^2 dx d\tau =$$
$$= \int_0^t \int_Q (\tilde{\varrho}^\varepsilon \boldsymbol{e} - \nabla p^0) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \tau) dx d\tau. \quad (3.1)$$

Интегрирование по частям по области Q с использованием уравнения неразрывности (1.1) и граничных условий приводит правую часть тождества к следующему виду:

$$\int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \tau)dx + \int_Q p^0 \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \tau)dx - \int_{\partial Q} p^0 \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \tau) \cdot \mathbf{n} ds = \int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \tau)dx$$

Для оценки правой части (3.1) используется представление

$$\tilde{\varrho}^\varepsilon = \varrho_f + (1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)(\varrho_s - \varrho_f), \quad \boldsymbol{e} = -\nabla x_3 ,$$

формула интегрирования по частям и уравнение неразрывности (1.1)

$$\varrho_f \int_Q \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} dx = -\varrho_f \int_Q (\nabla x_3) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} dx = 0 .$$

$$
I=\int_Q \tilde{\varrho}^{\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}dxd\tau=-\varrho_f\int_Q(\nabla x_3)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}dx+(\varrho_s-\varrho_f)\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}dx=
$$
$$
=(\varrho_s-\varrho_f)\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}dx\,.
$$

Неравенство Коши дает оценку

$$
I\leqslant(\varrho_s-\varrho_f)\Big(\int_\Omega dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\left|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant
$$
$$
\leqslant\frac{(\varrho_s-\varrho_f)^2}{2\delta}|\Omega|+\frac{\delta}{2}\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\left|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right|^2dx\,.
$$

Пусть $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}_s=\mathbb{E}_{\Omega^{\varepsilon}_s}\big(\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\big)$ — продолжение функции $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$ из области Ω^{ε}_s в область Ω. (Здесь используются результаты о продолжении C. Conca [19]). Тогда из неравенства Фридрихса-Пуанкаре

$$
\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\left|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right|^2dx=\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\left|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}_s}{\partial t}\right|^2dx\leqslant C\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\left|\nabla\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}_s}{\partial t}\right|^2dx
$$

и неравенства Корна

$$
\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\left|\nabla\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}_s}{\partial t}\right|^2dx\leqslant C\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\left|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}_s}{\partial t}\Big)\right|^2dx=C\int_Q(1-\chi^{\varepsilon})(1-\zeta)\left|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)\right|^2dx
$$

получается соотношение

$$
I\leqslant\frac{(\varrho_s-\varrho_f)^2}{2\delta}|\Omega|+C\frac{\delta}{2}\int_Q(1-\chi^{\varepsilon})(1-\zeta)|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)|^2dx\,.
$$

Выбор $\delta=\alpha_\mu/C$ дает следующую оценку:

$$
\int_0^T\int_Q\Big(\alpha_\mu\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{\varepsilon}\big)\left|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)\right|^2\Big)dx\,dt+
$$
$$
+\lambda_0\max_{0\leq t\leq T}\int_\Omega(1-\chi^{\varepsilon})\left|\mathbb{D}\Big(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\Big)\right|^2dx\leqslant C_0. \quad (3.2)
$$

Для получения оценки давления p^{ε} интегральное тождество (2.1) записывается в виде:

$$
\int_{Q_T}p^{\varepsilon}\nabla\cdot\varphi\,dx\,dt=\int_{Q_T}\bigg(\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{\varepsilon}\big)\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)+
$$
$$
+(1-\zeta)(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})\bigg):\mathbb{D}(x,\varphi)dx\,dt-\int_{Q_T}\tilde{\rho}^{\varepsilon}\mathbf{e}\cdot\varphi\,dx\,dt-\int_{Q_T}p^0\nabla\varphi\,dx\,dt.
$$

Такое представление и оценка (3.2) позволяют записать неравенство

$$\left|\int_{Q_T} p^\varepsilon \nabla\cdot\varphi\,dx\,dt\right| \leqslant C\Big(\int_{Q_T}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Далее выбирается пробная фу0нкция φ, удовлетворяющая условиям:

$$\nabla\cdot\varphi = p^\varepsilon \quad \text{и} \quad \int_{Q_T}|\nabla\varphi|^2 dx\,dt \leqslant \int_{Q_T}|p^\varepsilon|^2 dx\,dt.$$

Для этого она представляется в виде суммы $\varphi=\varphi_0+\nabla\psi$, где

$$\Delta\psi = p^\varepsilon,\ x\in Q;\quad \psi|_{S_2}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\Big|_{S_1}=0; \tag{3.4}$$

$$\nabla\cdot\varphi_0 = 0,\ x\in Q;\quad \varphi_0+\nabla\psi=0,\ x\in S_2. \tag{3.5}$$

Согласно результатам, изложенным в работах О. А. Ладыженской [20] и [28], каждая из задач (3.4), (3.5) имеет единственное решение, причем

$$\psi\in L_2\big((0,T);W_2^2(Q)\big),\quad \int_0^T\big(\|\psi\|_2^{(2)}\big)^2dt\leqslant C\int_{Q_T}(p^\varepsilon)^2dx\,dt,$$

$$\varphi_0\in L_2\big((0,T);W_2^1(Q)\big),\quad \int_0^T\big(\|\varphi_0\|_2^{(1)}\big)^2dt\leqslant C\int_{Q_T}\big(\|\psi\|_2^{(2)}\big)^2dt.$$

Тогда неравенство (3.3) примет вид

$$\left|\int_{Q_T}(p^\varepsilon)^2\,dx\,dt\right|\leqslant C\Big(\int_{Q_T}(p^\varepsilon)^2\,dx\,dt\Big)^{\frac{1}{2}},$$

и, окончательно,

$$\Big(\int_{Q_T}(p^\varepsilon)^2\,dx\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant C.$$

Полученные результаты дают требуемую в теореме 1 оценку (2.2). С помощью этой оценки существование и единственность обобщенного решения задачи (1.1), (1.4)-(1.8), (1.10)-(1.12) доказывается методом Галеркина.

4. Доказательство Теоремы 2. Пусть

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)$$

есть продолжение функции $\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ из Ω_f^ε в Ω.

Оценка (2.2) обеспечивает существование сходящихся подпоследовательностей (обозначенных так же), таких что

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p(\boldsymbol{x},t)\ \text{ слабо в } L_2(Q_T),$$

$$p^{\varepsilon} \to P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \text{ двухмасштабно в } L_2(Q_T),$$

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon} \to \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) \text{ двухмасштабно в } L_2(Q_T),$$

$$\boldsymbol{v}^{\varepsilon} \to \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) \text{ двухмасштабно в } L_2(Q_T),$$

$$\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\big) \to \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}\big) + \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\big) \text{ двухмасштабно в } L_2(\Omega_T),$$

$$\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{v}^{\varepsilon}\big) \to \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big) \text{ двухмасштабно в } L_2(Q_T).$$

Двухмасштабный предел в (2.1) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ дает интегральное тождество

$$\int_{Q_T} \Big[\Big\{\mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I} + (1-\zeta)\Big(\mu_0 \Big\langle \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\Big\rangle_{Y_f} + \lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) +$$
$$\lambda_0 \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})\rangle_{Y_s}\Big)\Big\} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) +$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) - \big(\zeta \varrho_f + (1-\zeta)\hat{\varrho}\big)\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}\Big] dxdt = 0\,. \quad (4.1)$$

Здесь используются обозначения:

$$\hat{\varrho} = m\,\varrho_f + (1-m)\,\varrho_s, \quad m = \int_Y \chi(\boldsymbol{y}) dy, \quad \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})\rangle_{Y_s} = \int_{Y_s} \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})\, dy.$$

Тождество (4.1) преобразуется в

$$\int_{Q_T} \Big[\Big\{\zeta \mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I} + (1-\zeta)\widehat{\mathbb{P}}\Big\} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) +$$
$$+ \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) - \big(\zeta \varrho_f + (1-\zeta)\hat{\varrho}\big)\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}\Big] dxdt = 0, \quad (4.2)$$

$$\widehat{\mathbb{P}} = (1-\zeta)\Big[\mu_0 \Big\{\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \Big\langle \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\Big\rangle_{Y_f}\Big\} + \lambda_0 (\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})\rangle_{Y_s})\Big]. \quad (4.3)$$

Уравнение неразрывности (1.1) после предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ не меняет своего вида:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0. \quad (4.4)$$

Можно показать, что интегральное тождество эквивалентно уравнениям(2.4) и (2.5), и граничным условиям (2.7) и (2.8). Граничное условие (2.9) следует из интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} \big(\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \nabla \boldsymbol{w}^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varphi}\big) dxdt = 0$$

для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, обращающейся в 0 на S^0, после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Начальное условие (2.10) следует из интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} m\Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{w}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\Big)dxdt=0,$$

справеливого для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ равной нулю при $t=T$. Последнее является результатом перехода к двухмасштабному пределу при $\varepsilon\to 0$ в тождестве

$$\int_{\Omega_T}\chi^{\varepsilon}\Big(\boldsymbol{v}^{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\Big)dxdt=0.$$

В результате предельного перехода при $\varepsilon\to 0$ в интегральном тождестве (2.1) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi}=\varepsilon h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ получается макроскопическое уравнение сохранения моментов

$$\nabla\cdot\widehat{\mathbb{P}}+\hat{\varrho}\boldsymbol{e}=0, \tag{4.5}$$

и микроскопическое уравнение сохранения моментов

$$\nabla_y\cdot\Big(\mu_0\,\chi\,\Big(\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)+\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\Big)+$$
$$+\lambda_0\,(1-\chi)\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})\big)-P\,\mathbb{I}\Big)=0\,.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\nabla_y\cdot\Big(\chi\,\big(\mu_0\,\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t})+\mathbb{Z}\big)+\lambda_0\,(1-\chi)\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})-P\,\mathbb{I}\Big)=0, \tag{4.6}$$

где

$$\mathbb{Z}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)-\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})=\sum_{i,j=1}^{3}Z_{ij}(\boldsymbol{x},t)\mathbb{J}^{(ij)}.$$

Найдем выражение для тензоров $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, и $\mathfrak{N}_3$. Будем использовать следующие обозначения. Для двух векторов a и b: $a\otimes b$ есть матрица отображения: $(a\otimes b)(c)=a(b\cdot c)$ для любого вектора c. Для тензоров 2 ранга A,B,C: $(A\otimes B):C=A(B:C)$, $B:C=tr(BC^T)$. Символом $\mathbb{J}^{(ij)}$ обозначен тензор 2 ранга:

$$\mathbb{J}^{(ij)}=\frac{1}{2}(e_i\otimes e_j+e_j\otimes e_i)\,.$$

Пусть $\{\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t),\ P^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\}$ и $\{\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}),\ P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\}$ $i,j=1,2,3$ есть решения периодических задач

$$\left.\begin{aligned}\nabla_y\cdot\Big(\chi\,\mu_0\,\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}\Big)+&\\ \lambda_0\,(1-\chi)\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)})-P^{(ij)}\,\mathbb{I}\Big)&=0,\\ \nabla_y\cdot\boldsymbol{W}^{(ij)}&=0,\\ \chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},0)&=\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}),\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla_y \cdot \Big(\chi\left(\mu_0\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)}) + \mathbb{J}^{(ij)} - P_0^{(ij)}\,\mathbb{I}\right)\Big) = 0, \\ \nabla_y \cdot \boldsymbol{W}_0^{(ij)} = 0, \ \int_Y \chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})dy = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

в области Y.

Тогда

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,$$

и

$$P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \chi(\boldsymbol{y})\sum_{i,j=1}^{3} P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})Z_{ij}(\boldsymbol{x},t) + \sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t P^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}) = \sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t \mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau))Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau = \\ \sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t \left(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau))\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\right) : \mathbb{Z}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau = \\ \Big(\mu_0\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)})\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) - \sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t \Big(\Big[\lambda_0\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)) + \\ \mu_0\,\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial\tau}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\Big]\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))d\tau. \end{aligned}$$

Используя очевидное равенство

$$\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial\tau}(\boldsymbol{y},t-\tau) = -\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau),$$

получаем

$$\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}) = \mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t-\tau) : \mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)\big)d\tau, \tag{4.9}$$

где

$$\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}) = \mu_0\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big)\otimes\mathbb{J}^{(ij)} \tag{4.10}$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t) = \\ \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\mu_0\,\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big) - \lambda_0\,\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\big)\Big)\otimes\mathbb{J}^{(ij)}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Уравнения (4.9)-(4.10) приобретают вид

$$\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)=\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}):\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big)+\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},0):\mathbb{D}\Big(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\Big)+\int_0^t\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau):\mathbb{D}\Big(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)\Big)d\tau.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{N}_1=\mu_0\,m\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{J}^{(ij)}\otimes\mathbb{J}^{(ij)}+\mu_0\,\langle\mathfrak{A}_0\rangle_{Y_f},\\ \mathfrak{N}_2=\lambda_0\,(1-m)\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{J}^{(ij)}\otimes\mathbb{J}^{(ij)}+\lambda_0\,\langle\mathfrak{A}_0\rangle_{Y_s}+\mu_0\,\langle\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},0)\rangle_{Y_f},\\ \mathfrak{N}_3(t)=\mu_0\,\langle\frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\rangle_{Y_f}+\lambda_0\,\langle\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t)\rangle_{Y_s}.\end{aligned}\right\}\tag{4.12}$$

Литература

1. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / М.: ГИТТЛ, 1952. –342 с.
2. Jäger W., Mikelić A. On the flow conditions at the boundary between a porous medium and an impervious solid / in "Progress in PDE: the Metz surveys 3 eds. Chipot M., Paulin J.S.J. et Shafrir I. / Pitman reseach Notes in Mathematics, №314. – London: Longman Scientific and Technical, 1994. – P145-161.
3. Jäger W., Mikelić A. On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid, Ann. Sc. norm. Super. Pisa, Cl, Sci.-Ser. IV, Vol. XXIII (1996), Fasc. 3 pp. 403– 465.
4. Jäger W., Mikelić A. On the boundary conditions at the contact interface between two porous media, in "PDE, Theory and numerical solution eds. W. Jäger, J. Nečas, O. John, K. Najzar and J. Stará, Chapman and Hall/CRC Research notes in math., N 406, pp. 175– 186. CRC Press, London (1999).
5. Jikov V. V., Kozlov S. M., and Oleinik O. A. Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals, Springer-Verlag, New York, 1994.
6. Kazemi H. Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution, Soc. Petroleum Engrs. J., V. 9 (1969) pp. 451– 462.
7. Kirk W. A., Sims B. Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer Academic, London, 2001.
8. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Dover Publications, 1999.
9. Kovalyshen Y., Detournay E. A Reexamination of the Classical PKNModel of Hydraulic Fracture, Transp. Porous Med., V. 81 (2010) pp. 317– 339.
10. Lions J.L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
11. Ladyzhenskaya O.A. The mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York, 1969.
12. Ladyzhenskaya O.A. The Boundary-Value Problems of Mathematical Physics, Springer, New York, 1985.
13. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., and Uraltseva N. N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Providence, Rhode Island, 1968.

14. Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик, Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа, Недра, Москва, 1972.
15. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal. – 2007. – 48. – P.519–538.
16. Meirmanov A. Acoustic and filtration properties of a thermoelastic porous medium: Biot's equations of thermo–poroelasticity // Sbornik Mathematics. – 2008. – 199, №. 3. – P.1–24.
17. Meirmanov A. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermoelastic porous media // Euro. Jnl. of Applied Mathematics. – 2008. – 19. – P.259–284.
18. Meirmanov A.M. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 163, №.2. – P111-172.
19. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl. – 1985. – 64. – P.31–75.
20. Ladyzhenskaya O.A. The mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow / New York: Gordon and Breach, 1969.
21. Biot M. A. 1941 General theory of three dimensional consolidation. Journal of Applied Physics 12 155 – 164.
22. Burridge R., Keller J. B. 1981 Poroelasticity equations derived from microstructure. Journal of Acoustic Society of America 70, No. 4, 1140–1146.
23. Chen Z. 2007 Homogenization and simulation for compositional flow in naturally fractured reservoirs. Math. Anal. App. 326 31 – 75.
24. Nguetseng G. 1989 A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM Journal on Mathematical Analysis 20, 608–623.
25. Sanchez-Palencia E., 1980 Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin, Lecture Notes in Physics, Vol.129, Springer.
26. de Swaan A., 1976 Analytic solutions for determing naturally fractured reservoir properties by well testing. Soc. Petroleum Engrs. J. 16 117 – 122.
27. Warren J.E., Root P. J. 1963 The behaviour of naturally fractured reservoirs. Soc. Petroleum Engrs. J. (1963)3 235 – 255.
28. Ladyzhenskaya O.A. The Boundary-Value Problems of Mathematical Physics, Springer, New York, 1985.
29. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., and Uraltseva N. N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Providence, Rhode Island, 1968.

CORRECTNESS OF THE PROBLEM FILTRATION FROM RESERVOIR TO SOIL: THE CASE OF VISCOUSE-ELASTIC FILTRATION

S.A. Gritsenko, N.S. Erygina

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru

Abstract. The problem of the liquid filtration from reservoir into the solid porous skeleton is investigated on microscopic level. The liquid dynamics is described by the system of not stationary hydrodynamic equations for incompressible liquid and common moving of elastic skeleton and liquid in the soil is described by the Lame's equations. It is proved the existence and the uniqueness of generalized solution of the problem. The averaging of total equation system is done that permits to avoid of fast oscillating coefficients.

Key words: liquid filtration, Lame's and not stationary hydrodynamic equations, averaging of periodic structures.